



# ROTATIES IN 3 DIMENSIES

4 SEPTEMBER 2008

AUTEUR:  
ING. BART RIBBENS

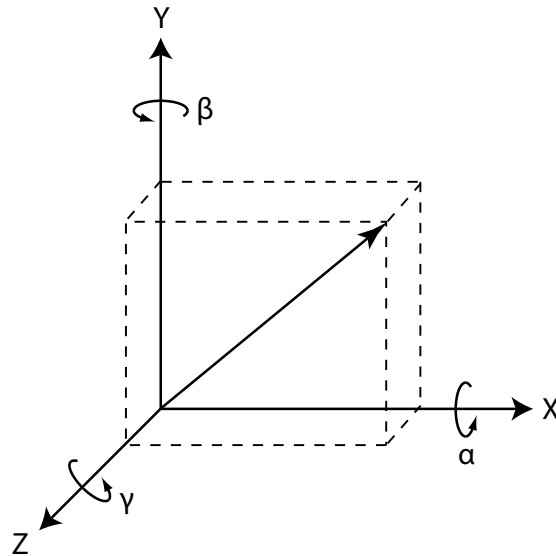
HOGESCHOOL ANTWERPEN  
DEPT. ELEKTROMECHANICA

# Inhoudsopgave

<b>1 Rotaties in 3 dimensies</b>	<b>2</b>
1.1 Een vector roteren rond de 3 basisassen . . . . .	2
1.1.1 Bepaling van de rotatiematrix en de nieuwe vector . . . . .	2
1.1.2 Bepaling van de richtingsvector $\mathbf{v}$ en de hoek $\theta$ . . . . .	4
1.2 Rotatie die vector $V_1$ afbeeldt op vector $V_2$ . . . . .	4
1.2.1 Bepaling van de richtingsvector $\mathbf{v}$ en de hoek $\theta$ . . . . .	4
1.2.2 Bepaling van de rotatiematrix . . . . .	5

# 1 Rotaties in 3 dimensies

## 1.1 Een vector roteren rond de 3 basisassen



Figuur 1: Basis rotaties

### 1.1.1 Bepaling van de rotatiematrix en de nieuwe vector

#### Theorie

Als we de rotatiehoeken rond de assen (X,Y,Z) gegeven krijgen, dan kunnen we van elke hoek de bijhorende rotatiematrix berekenen om vervolgens de samengestelde rotatiematrix te bepalen. Als we deze matrix hebben gevonden kunnen van elk punt en vector heel eenvoudig zijn geroteerd equivalent bepalen. Omdat cosinussen en sinussen van hoeken berekenen heel rekenintensief is, is het dus voordelig dat we dit slechts 1 keer moeten doen.

Je kan de rekentijd nog iets verkleinen door de cosinus en de sinus slechts 1 keer uit te rekenen voor elke hoek en de andere componenten van de matrix te bepalen ifv van een reeds gekende component. Het gaat immers sneller om een waarde te kopiëren of negatief te maken dan deze opnieuw uit te rekenen.

We bepalen deze rotatiematrices als volgt:

$$R_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$R_Y = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

$$R_Z = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De samengestelde matrix wordt dus als volgt berekend:

$$R_X \cdot R_Y \cdot R_Z = \begin{bmatrix} CyCz & -CySz & Sy \\ SxSyCz + CxSz & -SxSySz + CxCz & -SxCy \\ -CxSyCz + SxSz & CxSySz + SxCz & CxCy \end{bmatrix}$$

Waarbij

$$\begin{aligned} Cx &= \cos \alpha & Sx &= \sin \alpha \\ Cy &= \cos \beta & Sy &= \sin \beta \\ Cz &= \cos \gamma & Sz &= \sin \gamma \end{aligned}$$

### Voorbeeld

Om deze oefening te maken gaan we uit van volgende gegevens:

*Vector1*

$$V1(1, 0, 0)$$

*Rotatiehoeken*

$$\alpha = 45$$

$$\beta = 34$$

$$\gamma = 75$$

We zoeken nu de rotatiematrix en de vector die gevonden wordt door de originele vector te vermenigvuldigen met de rotatiematrix.

Rotatiematrices:

$$R_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,707 & -0,707 \\ 0 & 0,707 & 0,707 \end{bmatrix}$$

$$R_Y = \begin{bmatrix} 0,829 & 0 & 0,559 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0,559 & 0 & 0,829 \end{bmatrix}$$

$$R_Z = \begin{bmatrix} 0,259 & -0,966 & 0 \\ 0,966 & 0,259 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_X \cdot R_Y \cdot R_Z = \begin{bmatrix} 0,215 & -0,581 & 0,785 \\ 0,801 & 0,565 & 0,199 \\ -0,559 & 0,586 & 0,586 \end{bmatrix}$$

$$M \cdot V_1 = V_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0,215 & -0,581 & 0,785 \\ 0,801 & 0,565 & 0,199 \\ -0,559 & 0,586 & 0,586 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,215 \\ 0,801 \\ -0,559 \end{bmatrix}$$

Als we dus de vector (1,0,0) 45° rond X, 34° rond Y en 75° rond Z roteren, dan resulteert dit in de vector (0.215,0.801,-0,559). Als we nu een andere vector willen roteren rond dezelfde hoeken, dan kunnen we gewoon de samengestelde rotatiematrix gebruiken om dit resultaat te bekomen. We hoeven nu geen moeilijke berekeningen meer uit te voeren. Indien we dus een 3D-model willen roteren, kunnen we alle punten het model simpelweg vermenigvuldigen met de gevonden samengestelde rotatiematrix.

### 1.1.2 Bepaling van de richtingsvector $\mathbf{v}$ en de hoek $\theta$

Het eerste dat je moet zoeken, is de hoek  $\theta$ . Om deze te vinden neem je de boogcosinus van de som van de diagonaalelementen van de samengestelde rotatiematrix verminderd met één.

$$\theta = \text{bgcos} \left( \frac{R_{11} + R_{22} + R_{33} - 1}{2} \right)$$

Nu kan je ook componenten van de richtingsvector berekenen met behulp van onderstaande formules.

$$u_x = \frac{R_{2,3} - R_{3,2}}{2\sin(\theta)}$$

$$u_y = \frac{R_{1,3} - R_{3,1}}{2\sin(\theta)}$$

$$u_z = \frac{R_{2,1} - R_{1,2}}{2\sin(\theta)}$$

*Oplossing*

$$\theta = 79,463$$

$$u_x = 0,197$$

$$u_y = 0,684$$

$$u_z = 0,703$$

## 1.2 Rotatie die vector $V_1$ afbeeldt op vector $V_2$

### 1.2.1 Bepaling van de richtingsvector $\mathbf{v}$ en de hoek $\theta$

We bepalen eerst de richtingsvector adhv het vectorieel product van de gegeven vectoren. Een vectorieel product kan als volgt beschreven worden.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

Stel dat we de uitkomst gebruiken van onze methode om een vector te roteren langs de 3 basisassen, dan krijgen we volgende gegevens.

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$V_2 = \begin{pmatrix} 0,215 \\ 0,801 \\ -0,559 \end{pmatrix}$$

Hou er wel rekening mee dat deze vectoren dezelfde grootte moeten hebben. In ons geval zijn beide vectoren genormaliseerd. Indien je een vector wil normaliseren, dien je deze te delen door de wortel van de som van de kwadraten van de X-,Y-,Z-componenten.

Het invullen van onze gegevens geeft ons de volgende matrix.

$$\det \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0,215 & 0,801 & -0,559 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
u_x &= \det \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0,801 & -0,559 \end{bmatrix} \\
u_y &= -\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0,215 & -0,559 \end{bmatrix} \\
u_z &= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0,215 & 0,801 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Na berekening volgt

$$\begin{aligned}
u_x &= 0 \\
u_y &= 0,559 \\
u_z &= 0,801
\end{aligned}$$

We kunnen nu  $\theta$  berekenen adhv onderstaande formule

$$\theta = \text{bgcos}(V_{1x} \cdot V_{2x} + V_{1y} \cdot V_{2y} + V_{3x} \cdot V_{3y})$$

### 1.2.2 Bepaling van de rotatiematrix

De rotatiematrix ziet er nu als volgt uit.

$$R = \begin{bmatrix} tx^2 + c & txy - sz & txz + sy \\ txy + sz & ty^2 + c & tyz - sx \\ txz - sz & tyz + sx & tz^2 + c \end{bmatrix}$$

Waarbij

$$\begin{aligned}
c &= \cos\theta \\
s &= \sin\theta \\
t &= 1 - \cos\theta
\end{aligned}$$

## Lijst van figuren

1	Basis rotaties . . . . .	2
---	--------------------------	---